Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. EUCLIDEOS

1. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,2,0),(1,0,0),(2,3,-1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Una base ortogonal por Gram-Schmidt es $\{(1,2,0),(4/5,-2/5,0),(0,0,-1)\}$ y la base ortogonal sería $\{(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5},0),(2/\sqrt{5},-1/\sqrt{5},0),(0,0,-1)\}$

2. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^4$

$$\{(1,2,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$$

para hallar una base ortonormal respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^4$.

Solución: Una base ortogonal por Gram-Schmidt es

$$\{(1,2,1,0),(5/6,-1/3,-1/6,0),(0,1/5,-2/5,0),(0,0,0,1)\}$$

y la base ortogonal sería

$$\{(1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},0),(\sqrt{5/6},-\sqrt{6}/3\sqrt{5},-1/\sqrt{6}\sqrt{5},0),(0,1/\sqrt{5},-2/\sqrt{5},0),(0,0,0,1)\}$$

3. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

Demuestra que es un producto escalar.

Solución: Habría que comprobar las cuatro propiedades del productor escalar, para este producto en particular. Si se va viendo una a una, se ve facilmente que es producto escalar:

- $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$
- $ku\cdot w = k(u\cdot v)$
- $u\cdot v = v\cdot u$
- $u\cdot u \geq 0$ y $u\cdot u = 0 \leftrightarrow u = 0$

donde $u=(x_1,y_1,z_1), v=(x_2,y_2,z_2), w=(x_3,y_3,z_3)$

4. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1=(1,1,-1),\ v_2=(1,1,2),\ v_3=(1,1,0).$$

Calcula qué ángulo forman entre sí los vectores v_1 y v_2, los vectores v_2 y v_3, y comprueba la desigualdad de Cauchy-Schwartz usando los vectores v_1 y v_3.

Solución: Tenemos que el ángulo que forman v_1 y v_2 es 90 grados porque su producto escalar es 0. El ángulo que forman v_2 y v_3 es aproximadamente 54 grados, ya que obtenemos que el coseno del ángulo es $1/\sqrt{3}$. La comprobación de la desigualdad sería sustituir por los valores que es $|2| \leq \sqrt{6}$

5. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1=(1,1,1),\ v_2=(1,1,2),\ v_3=(1,1,0).$$

7. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual, calcula la proyección ortogonal del vector $v = (1,0,0,2)$ sobre el subespacio

$$S = \{(x,y,z,t) \mid \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+2y=0 \end{array} \right. \}$$

Solución: Primero hay que obtener una base del espacio subespacio S que es

$$\{(2,-1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

, que es ortgonal. La base ortonormal es $\{(2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},0),(0,0,0,1)\}$ y la proyección ortogonal es del vector v es $(2/3,-1/3,1/3,2)$

8. Calcula soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales $Ax = b$ y halla el error cometido al tomar la solución aproximada.

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $x = (3,2)$

b) $x = (-4,3)$

c) $x = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

d) $x = (5-x_3, x_3-3, x_3)$

e) $x = (11,-9,6)$

9. Un cierto experimento produce los datos empíricos (x_i, y_i) siguientes: (1,1.8), (2,2.7), (3,3.4) y (4,4.38). Si los resultados deben corresponder a una función de la forma $y = a_1 + a_2 x$, calcular por mínimos cuadrados la función de esa familia que mejor ajusta a los datos empíricos.